Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

I вариант

Задача 1. Ученикам 11 «А» класса на выбор предложили пройти тестирование ровно по одному из предметов: химии, информатике или физике. Трое ребят приняли участие в тестировании по химии; более 40%, но менее половины учеников проходили тестирование по информатике и ровно треть — по физике. Сколько ребят участвовало в тестировании по информатике, если в классе присутствовало более 12 учеников?

Задача 2. Из Москвы на Международный шахматный турнир в Нью-Васюках шахматисты всех команд (одинаковых по численности) добирались двумя способами. Некоторые команды заняли все места в 5-местных и одной 2-местной каютах парохода "Повелитель бурь". Другие команды предпочли занять все места в 7-местных и одной 4-местной каютах дирижабля "Скрябин". Сколько спортсменов было в команде, если занятых 7-местных кают оказалось на одну больше, чем занятых 5-местных?

Задача 3. Докажите, что число $2^{2014}+1$ можно представить в виде произведения трех натуральных чисел, больших 1.

Задача 4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC, равна 2013. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Задача 6. Пусть $S_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1)$. Найдите S_{2013} для $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x+3}$.

Задача 7. На плоскости задана точка P. Рассматриваются различные равносторонние треугольники ABC, такие что $PA = 2$, $PB = 3$. Какое максимальное значение может принимать длина отрезка PC?

Задача 8. При каких значения параметра a уравнение $5x^4 + 7ax + 2a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

Задача 9. Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по ребрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

Задача 10. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повернут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер AD и B_1C_1. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

II вариант

Задача 1. Ученикам 11 «Б» класса на выбор предложили пройти тестирование ровно по одному из предметов: биологии, математике или химии. Двое ребят приняли участие в тестировании по биологии; более трети, но менее 40% учеников проходили тестирование по химии и ровно половина — по математике. Сколько ребят участвовало в тестировании по химии, если в классе присутствовали более 16 учеников?

Задача 2. В автомобильном пробеге Москва–Удоев–Москва участвовали несколько (одинаковых по численности) делегаций автолюбителей. Некоторые из этих делегаций заняли все места в 3-местных "Паккардах" и одном 4-местном "Лорен-Дитрихе", а остальные делегации предпочли занять все места в 5-местных "Студебеккерах" и одном 2-местном "Фиате". Сколько автолюбителей было в делегации, если "Студебеккеров" в пробеге оказалось на 5 больше, чем "Паккардов"?

Задача 3. Докажите, что число $4^{2013}+1$ можно представить в виде произведения трех натуральных чисел, больших 1.

Задача 4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC, равна 2012. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Задача 6. Пусть $S_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1)$. Найдите S_{2013} для $f(x) = \dfrac{25^x}{25^x+5}$.

Задача 7. На плоскости задана точка P. Рассматриваются различные равносторонние треугольники ABC, такие что $PA=3$, $PB=4$. Какое максимальное значение может принимать длина отрезка PC?

Задача 8. При каких значения параметра a уравнение $3x^4 - 5ax + 2a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

Задача 9. Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по ребрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

Задача 10. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повернут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер AD и B_1C_1. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.

Страница олимпиады: *http://olimpiada.ru/ommo*

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

III вариант

Задача 1. Ученикам 11 «Б» класса на выбор предложили пройти тестирование ровно по одному из предметов: биологии, математике или химии. Двое ребят приняли участие в тестировании по биологии; более трети, но менее 40% учеников проходили тестирование по химии и ровно половина — по математике. Сколько ребят участвовало в тестировании по химии, если в классе присутствовали более 16 учеников?

Задача 2. Из Санкт-Петербурга на Международный шахматный турнир в Нью-Васюках шахматисты всех команд (одинаковых по численности) добирались двумя способами. Некоторые команды заняли все места в 7-местных и одной 4-местной каютах парохода “Карл Либкнехт”. Другие команды предпочли занять все места в 3-местных и одной 1-местной каютах дирижабля “Пегас”. Сколько спортсменов было в команде, если занятых 3-местных кают оказалось на 2 меньше, чем занятых 7-местных?

Задача 3. Докажите, что число $2^{2014}+1$ можно представить в виде произведения трех натуральных чисел, больших 1.

Задача 4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC, равна 2013. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Задача 6. Пусть $S_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1)$. Найдите S_{2013} для $f(x) = \dfrac{36^x}{36^x+6}$.

Задача 7. На плоскости задана точка P. Рассматриваются различные равносторонние треугольники ABC, такие что $PA = 4$, $PB = 5$. Какое максимальное значение может принимать длина отрезка PC?

Задача 8. При каких значения параметра a уравнение $2x^4 + 9ax + 7a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

Задача 9. Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по ребрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

Задача 10. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повернут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер AD и B_1C_1. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

IV вариант

Задача 1. Ученикам 11 «А» класса на выбор предложили пройти тестирование ровно по одному из предметов: химии, информатике или физике. Трое ребят приняли участие в тестировании по химии; более 40%, но менее половины учеников проходили тестирование по информатике и ровно треть — по физике. Сколько ребят участвовало в тестировании по информатике, если в классе присутствовало более 12 учеников?

Задача 2. В автомобильном пробеге Санкт-Петербург–Арбатов–Санкт-Петербург участвовало несколько (одинаковых по численности) делегаций автолюбителей. Некоторые из этих делегаций заняли все места в 7-местных "Линкольнах" и одном 6-местном "Испано-Сюиза", а остальные делегации предпочли занять все места в 5-местных "Кадиллаках" и одном 3-местном "Изотта-Фраскини". Сколько автолюбителей было в делегации, если "Линкольнов" в пробеге оказалось на 2 больше, чем "Кадиллаков"?

Задача 3. Докажите, что число $4^{2013}+1$ можно представить в виде произведения трех натуральных чисел, больших 1.

Задача 4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC, равна 2012. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Задача 6. Пусть $S_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1)$. Найдите S_{2013} для $f(x) = \dfrac{16^x}{16^x+4}$.

Задача 7. На плоскости задана точка P. Рассматриваются различные равносторонние треугольники ABC, такие что $PA = 5$, $PB = 6$. Какое максимальное значение может принимать длина отрезка PC?

Задача 8. При каких значения параметра a уравнение $2x^4 - 7ax + 5a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

Задача 9. Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по ребрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

Задача 10. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повернут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер AD и B_1C_1. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.

Страница олимпиады: *http://olimpiada.ru/ommo*