Объединенная межвузовская математическая олимпиада **01.02.2015**

I вариант (9–10 классы)

Задача 1. Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх относится к сумме всех членов без последних трёх как 4 : 3. Найти количество членов этой прогрессии.

Задача 2 На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди — среднего, а лжецы — низшего. A, B и C — жители этого острова. Один из них — рыцарь, другой — лжец, а третий — обычный человек. A и B сказали следующее. A: "B по рангу выше, чем C." B: "C по рангу выше, чем A." Что ответил C на вопрос: "Кто выше по рангу — A или B?"

Задача 3. Четырехзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна N. Оказалось, что число N делится на 100. Найдите N.

Задача 4 Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.

Задача 5 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 + 42xy + 17y^2 = 10; \\ 10x^2 + 18xy + \ \ 8y^2 = 6. \end{cases}$$

Задача 6. Будем обозначать $f^{(n)}(x)$ последовательное применение n раз функции f (например, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ и т. д.). Даны функции $g(x) = \frac{1}{x+1}$ и $h(x) = \frac{x+1}{x}$. Найдите значение выражения $g^{(2105)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$.

Задача 7 Прямая c задается уравнением $y = x + 1$. Точки A и B имеют координаты $A(1; 0)$ и $B(3; 0)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{a}(x^2 + y^2) + \sqrt{13 - a}(x + y) - \sqrt{13a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

Задача 9. В турнире по минифутболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 5 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 1, на третью — 1 : 8, на четвертую — 1 : 7. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Задача 10 Прямоугольник П разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника П.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **01.02.2015**

II вариант (9–10 классы)

Задача 1. Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 5 : 4. Найдите количество членов этой прогрессии.

Задача 2 На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может и говорить правду, и лгать). Жители этого острова, A и B, сказали следующее. A: “B — рыцарь.” B: “A — лжец.” Докажите, что либо один из них говорит правду, но это не рыцарь, либо один из них лжет, но это не лжец.

Задача 3. Четырехзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, полученного из X перестановкой его второй и третьей цифр, делится на 900. Найдите остаток от деления числа X на 90.

Задача 4 Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 155 и 13 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.

Задача 5 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 - 42xy + 17y^2 = 10; \\ 10x^2 - 18xy + \ \ 8y^2 = 6. \end{cases}$$

Задача 6. Будем обозначать $f^{(n)}(x)$ последовательное применение n раз функции f (например, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ и т. д.). Даны функции $g(x) = \frac{1}{x+1}$ и $h(x) = \frac{x+1}{x}$. Найдите значение выражения $g^{(2105)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$.

Задача 7 Прямая c задается уравнением $y = 2x$. Точки A и B имеют координаты $A(2; 2)$ и $B(6; 2)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{10 - a}(x^2 + y^2) + \sqrt{a}(x + y) - \sqrt{10a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

Задача 9. В турнире по минифутболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 2 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раза больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 3, на третью — 1 : 4, на четвертую — 1 : 7. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Задача 10 Прямоугольник П разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника П.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **01.02.2015**

III вариант (9–10 классы)

Задача 1. Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как $3:2$. Найдите количество членов этой прогрессии.

Задача 2 На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Два жителя называются *однотипными*, если они либо оба рыцари, либо оба лжецы. A, B и C — жители этого острова. A говорит: "B и C однотипны". Что ответит C на вопрос "A и B однотипны?"

Задача 3. Если из четырехзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N = K^2$, причем K — натуральное число, дающее остаток 2 при делении на 10 и остаток 6 при делении на 11. Найдите число N.

Задача 4 Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а ее боковые стороны взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

Задача 5 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 + 14xy + 10y^2 = 17; \\ 4x^2 + 10xy + \ \ 6y^2 = 8. \end{cases}$$

Задача 6. Будем обозначать $f^{(n)}(x)$ последовательное применение n раз функции f (например, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ и т. д.). Даны функции $g(x) = \frac{1}{x+1}$ и $h(x) = \frac{x+1}{x}$. Найдите значение выражения $g^{(2105)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$.

Задача 7 Прямая c задается уравнением $y = x + 1$. Точки A и B имеют координаты $A(1;0)$ и $B(3;0)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{a}(x^2 + y^2) + \sqrt{13 - a}(x + y) - \sqrt{13a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

Задача 9. В турнире по волейболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении $1:5$ (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении $1:1$, на третью — $1:5$, на четвертую — $1:6$. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Задача 10 Прямоугольник П разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника П.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **01.02.2015**

IV вариант (9–10 классы)

Задача 1. Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как $6:5$. Найдите количество членов этой прогрессии.

Задача 2 На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может и говорить правду, и лгать). Жители этого острова А и В сказали следующее. А: "В — рыцарь." В: "А — не рыцарь." Докажите, что по крайней мере один из них говорит правду, но это не рыцарь.

Задача 3. Если из четырехзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N = K^2$, причем K — натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число N.

Задача 4 Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 155 и 13 соответственно, а ее боковые стороны взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

Задача 5 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 - 14xy + 10y^2 = 17; \\ 4x^2 - 10xy + \ \ 6y^2 = 8. \end{cases}$$

Задача 6. Будем обозначать $f^{(n)}(x)$ последовательное применение n раз функции f (например, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ и т. д.). Даны функции $g(x) = \frac{1}{x+1}$ и $h(x) = \frac{x+1}{x}$. Найдите значение выражения $g^{(2105)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$.

Задача 7 Прямая c задается уравнением $y = 2x$. Точки A и B имеют координаты $A(2;2)$ и $B(6;2)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{10-a}(x^2+y^2) + \sqrt{a}(x+y) - \sqrt{10a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

Задача 9. В турнире по волейболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении $1:2$ (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении $1:4$, на третью — $1:5$, на четвертую — $1:6$. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Задача 10 Прямоугольник П разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника П.