

Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Московский государственный строительный университет
Ассоциация московских вузов

Утверждаю
Проректор по УМР и МД

_____ Гагин В.И.
«___» _____ 2009 г.

ОТЧЕТ

о выполнении подраздела мероприятий
по социальному обслуживанию населения
в части предоставления образовательных услуг
жителям города Москвы

Подраздел №11.5.3.3. «Методы анализа и оценки условий
безопасного применения систем автоматизированного
проектирования зданий и сооружений»
(Научно-образовательный материал)

Научный руководитель подраздела	Старший Преподаватель каф. ИПМ МГСУ	(499) 183-59-94		Пеньковой С.Б.
Ответственный исполнитель	М.н.с. НИЦ «Информтехпроект»			Хоркина Ж.Г.
	Должность	Телефон	Подпись	Дата
				ФИО

Москва, 2009 г.

Под научным руководством и при непосредственном участии старшего преподавателя каф. ИПМ Пенькового С.Б. (отв. исполнитель М.н.с. НИЦ «Информтехпроект» Хоркина Ж.Г.) в рамках подраздела 11.5.3.3. были разработаны, коллегиально рассмотрены и протестированы, а также вручены для практического использования заинтересованным специалистам строительного комплекса Москвы научно-информационные материалы в области методов анализа и оценки условий безопасного применения систем автоматизированного проектирования зданий и сооружений на примерах корректных, адаптированных для компьютерной реализации постановок краевых задач расчета анизотропных плит (например, фундаментных) и анизотропной теории упругости и соответствующих численных аппроксимаций с использованием метода стандартной (расширенной) области. Разработки авторов могут использоваться как для моделирования, в частности, напряженно-деформированного состояния неоднородных оснований с использованием метода конечных элементов, широко применяемого в популярных программных комплексах машинного проектирования, так и для их частичной верификации.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	4
1. Понятие об операторных постановках краевых задач и методе расширенной области	5
2. Виды постановок краевых задач	7
3. Традиционные постановки краевых задач об изгибе анизотропной плиты	9
4. Постановки краевых задач об изгибе анизотропной плиты в рамках метода расширенной области	11
5. Аппроксимация краевых задач об изгибе анизотропной плиты	15
6. Традиционные постановки краевых задач анизотропной теории упругости	17
7. Вариационные постановки краевых задач анизотропной теории упругости	19
8. Аппроксимация краевых задач анизотропной теории упругости	22
9. Постановка и аппроксимация краевых задач анизотропной теории упругости в рамках метода стандартной области	27
Рекомендуемая литература	32

ВВЕДЕНИЕ.

Плита является одной из наиболее распространенных конструкций в строительстве. В качестве примеров соответствующих объектов можно указать перекрытия в зданиях, фундаменты из плит, аэродромные покрытия и т.д. [4] Условия работы плит, как правило, достаточно сложные. Так, например, железобетонная плита может быть армирована резко неоднородно. Учет различного по направлению армирования и раскрытия трещин зачастую ведет к постановке нелинейной задачи об изгибе анизотропной плиты. Важнейшей составной частью решения этой задачи является рассмотрение проблемы изгиба изотропной упругой пластины.

1. ПОНЯТИЕ ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ПОСТАНОВКАХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДЕ РАСШИРЕННОЙ ОБЛАСТИ.

Многие сложные конструкции можно представить как совокупность элементов, расчетную схему которых представляет краевая задача строительной механики. Поэтому решение и исследование краевых задач в условиях разнообразия формы конструкций и математических моделей, представляющих собой различные технические теории и материалы, остается актуальной проблемой.

В основе представляемых разработок лежит определенное конструктивное понимание авторами оператора краевой задачи. Это понимание реализовано в виде единых формул, одновременно описывающих условия как внутри области, так и граничные. Такая формализация приводит к явным формулам для оператора краевой задачи и носит также алгоритмический характер, т.е. позволяет вычислить действие оператора краевой задачи на произвольную функцию, например для вычисления невязки.

Главной основой полученных формул является непосредственное включение характеристической функции области, что кратчайшим путем приводит к трем взаимнооднозначным постановкам (вариационной, операторной и граничной) на континуальном и дискретном уровнях.

Полезное свойство разработанных операторных постановок состоит в том, что их дискретный аналог (например, в рамках метода конечных разностей) имеет такой же вид, что и континуальный, и при этом также может рассматриваться на самой простой области, окаймляющей данную.

При проведении исследований ставилась задача представления постановки задачи в наиболее общей и удобной для построения алгоритмов решения форме. Основой для постановки задачи является метод расширенной (стандартной) области, разработанный проф. А.Б. Золотовым. Сущность этого метода заключается в выработке единой, применимой для произвольных геометрических и

физических характеристик, операторной записи исходной краевой задачи и ее дискретного аналога, а затем и в построении численных алгоритмов.

2. ВИДЫ ПОСТАНОВОК КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

Традиционные постановки.

Традиционные постановки граничных задач, т.е. краевых задач и задач Коши, включают: описание исходной области ($\Omega = \Omega_t \times \Omega_x$), условия внутри области (дифференциальные уравнения), условия на границе области (начальные и краевые). Все три части исходной постановки предполагаются независимыми, хотя и соблюдаются некоторые требования согласованности и непротиворечивости.

Независимость формулировок внутренних и граничных условий не играет роли, когда ищется точное аналитическое решение задачи, но становится весьма неудобной в случае приближенных методов решения. Основной причиной является необходимость вычисления и оценки невязки для произвольных функций, которые в общем случае не удовлетворяют ни уравнениям, ни граничным условиям. Кроме того, для вычисления невязки и формирования разрешающей системы желательно иметь единые алгоритмы, учитывающие внутренние и граничные условия одновременно. Таким образом, появляется необходимость в конструктивных операторных формулировках граничных задач, которые включали бы все части традиционной постановки в согласованном с вычислительной точки зрения виде.

Вариационные постановки.

Вариационные постановки в виде эквивалентного функционала энергии в значительной мере удовлетворяют данному требованию. Если этот функционал $\Phi(u)$ может быть эффективно вычислен для любой функции u , то для реализации условия его стационарности реализуется универсальный алгоритм формирования невязки и разрешающей системы (метод базисных вариаций). Недостатком этого подхода является относительно невысокая скорость формирования и, кроме того, не для всех задач существует эквивалентный минимизирующий функционал (например, нестационарные задачи).

В связи с тем, что традиционная постановка краевых задач предъявляет несколько завышенные требования к гладкости функций и имеет сложную формулировку естественных краевых условий, на практике основной постановкой краевых задач является именно вариационная. Она имеет меньший порядок производной, не требует отдельной записи естественных краевых условий, автоматически обеспечивает симметричную структуру аппроксимирующих систем уравнений.

Отметим, что из вариационной постановки выводится в качестве уравнений Эйлера краевая задача в виде уравнений. Обратная связь напрямую не прослеживается, поскольку в традиционной формулировке при краевых условиях отсутствуют весовые характеристики.

Операторные постановки.

Операторные постановки объединяют все компоненты традиционных постановок. Соответствующие операторы определяются, например, с привлечением аппарата гильбертовых пространств (шкалы пространств, пространства следов, произведения пространств [12]). Эти определения дают основные весовые характеристики для граничных условий, однако их расшифровки, которые приводили бы к явным формулировкам, позволяющим выполнить действия этих операторов на произвольную функцию, как правило, отсутствуют. Тем не менее, такие формулировки возможны. В случаях, когда для граничной задачи существует функционал, операторная постановка полностью вытекает из него и наоборот. Основная идея операторных постановок достаточно проста и состоит в объединении всех частей исходной постановки в одном уравнении с соответствующими весовыми характеристиками. Для этого используются характеристическая функция самой области Ω и ее производные, сосредоточенные на границе.

3. ТРАДИЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ.

Как известно, краевая задача об изгибе плиты состоит из трех основных частей: описания области (занимаемой плитой), условий внутри области и условий на границе области.

Внутри области общая краевая задача об изгибе анизотропной плиты формулируется следующим уравнением [1,4,14]

$$B_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 4B_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 4B_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} + 2(B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + B_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = q, \quad (3.1)$$

где B_{st} – постоянные, характеризующие упругость тела (коэффициент цилиндрической жесткости); $w = w(x_1, x_2)$ – искомая функция (прогиб плиты); $q = q(x_1, x_2)$ – заданная нагрузка; Ω – область, занимаемая плитой, с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

Рассмотрим основные типы краевых задач (в зависимости от типов краевых условий).

Первая краевая задача.

Имеем граничные условия первого типа:

$$\begin{cases} w = w_0, & x \in \partial\Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = \varphi_0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь w_0 – заданные перемещения на границе области; φ_0 – заданный угол поворота края плиты.

Вторая краевая задача.

Имеем граничные условия второго типа:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 \cos^2(n, x_t) B_{st} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} + 4 \cos(n, x_1) \cos(n, x_2) B_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ & + 2 \sum_{s=1}^2 \left(\cos(n, x_1) \cos(n, x_2) B_{s3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} + \cos^2(n, x_s) B_{s3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = M_n, \quad x \in \partial\Omega; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 \cos(n, x_t) B_{st} \frac{\partial^3 w}{\partial x_t \partial x_s^2} + 4 \left(\cos(n, x_1) B_{33} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \cos(n, x_2) B_{33} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) + \\
& + 2 \sum_{s=1}^2 \left(\cos(n, x_1) B_{s3} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial x_s^2} + \cos(n, x_2) B_{s3} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_s^2} \right) + \\
& + \cos(n, x_s) B_{s3} \frac{\partial^3 w}{\partial x_s \partial x_1 \partial x_2} = Q_n, \quad x \in \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где M_n и Q_n – нормальный момент и поперечная сила, заданные на кромке плиты; n – нормаль к линии границы плиты.

Возможна постановка и смешанной краевой задачи (на части границы заданы условия одного типа, на части – другого).

4. ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ В РАМКАХ МЕТОДА РАСШИРЕННОЙ ОБЛАСТИ.

Сформулируем уравнение изгиба анизотропной плиты в виде единого дифференциального оператора для стандартной области с применением некоторых обобщенных функций. В случае краевой задачи с естественными граничными условиями имеем:

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} \theta B_{st} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} + 4 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \theta B_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \theta B_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \theta B_{s3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} \right) = q + \delta'(p)M_n + \delta(p)Q_n, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.1)$$

где θ – характеристическая функция области,

$$\theta = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega; \end{cases} \quad (4.2)$$

$\delta(p)$ – дельта-функция границы $\Gamma = \partial\Omega$; $\delta'(p)$ – нормальная производная от дельта-функции границы $\Gamma = \partial\Omega$.

Формулировка (4.1) выгодно отличается от соответствующей ей (3.1), (3.3)-(3.4) по целому ряду причин. Во-первых, она включает в себя граничные условия и условия внутри области. Во-вторых, она записана для плиты переменной жесткости ($B_{st} = B_{st}(x_1, x_2)$). Вместе с тем, общая запись более компактна. Представленное уравнение можно рассматривать на любой окаймляющей конструкции (стандартной, расширенной) области.

С помощью соответствующих характеристических функций, можно использовать уравнение (4.1) для формулировки смешанной краевой задачи, так же, как и в случае задачи теории упругости. Однако ниже мы ограничимся тем, что сформулируем третью краевую задачу в силу того, что она значительно проще и приближенно может представлять любую краевую задачу.

Третья краевая задача.

Имеем:

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} \bar{B}_{st} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} + 4 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \bar{B}_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \bar{B}_{s3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \bar{B}_{s3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} \right) +$$

$$+ c_0 w + c \delta(p) w + c_\varphi \delta'(p) \frac{\partial w}{\partial n} = q + \delta'(p) M_n + \delta(p) Q_n, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.3)$$

где $\bar{B}_{st} = \theta B_{st}$; $\delta(p)$ и $\delta'(p)$ – функции, сосредоточенные на границы области, занимаемой плитой; $p(x) = 0$ – уравнение границы плиты; c_0 – коэффициент постели упругого основания; c – коэффициент упругости опор на границе; c_φ – коэффициент упругости заделки на границе.

При использовании (4.3) для решения задач изгиба плиты со смешанными краевыми условиями, следует считать жесткие опирания плиты упругими, но с очень большими коэффициентами упругости.

Проще поддается алгоритмизации уравнение общей задачи об изгибе анизотропной плиты, сформулированное в виде функционала энергии. Так, например, квадратичная часть общего функционала, соответствующего краевой задаче третьего рода, а приближенно общей краевой задачи, имеет вид:

$$\Phi(w) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 B_{st} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} + 4 \sum_{s=1}^2 B_{s3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 4 B_{33} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + c_0 w^2 \right) dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int_l \left(c w^2 + c_\varphi \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right) dl, \quad (4.4)$$

где l – линия границы плиты.

Последний интеграл в (4.4) можно записать с привлечением функции $\delta(p)$. Тогда квадратичная часть функционала окончательно примет вид:

$$\Phi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 B_{st} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} + 4 \sum_{s=1}^2 B_{s3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 4 B_{33} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + c_0 w^2 + \delta(p) \left(c w^2 + c_\varphi \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right) \right) dx_1 dx_2. \quad (4.5)$$

Линейная часть функционала имеет вид:

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta q w dx_1 dx_2 + \int_l \left(M_n \frac{\partial w}{\partial n} + Q_n w \right) dl \quad (4.6)$$

или с учетом теории обобщенных функций:

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\theta q + M_n \delta'(p) + Q_n \delta(p)) w dx_1 dx_2 \quad (4.7)$$

При расчетах анизотропных плит на этапе постановки задачи, как правило, привлекается функционал энергии:

$$\begin{aligned} \Phi(w) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta \left(B_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 4B_{33} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(B_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) dx dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta c w^2 dx dy, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где w – неизвестная функция прогибов плиты; B_{st} – коэффициенты цилиндрической жесткости (так, например, для изотропной плиты $B_{11} = B_{22} = D$; $B_{12} = B_{21} = D\nu$; $B_{33} = D(1-\nu)/2$; $B_{13} = B_{23} = B_{31} = B_{32} = 0$); D – цилиндрическая жесткость; ν – коэффициент Пуассона материала плиты.

Заметим, что последнее слагаемое присутствует в (4.8) при наличии опирания плиты на упругое основание (4.8) (основание Винклера) с коэффициентом постели c .

Значения внутренних моментов и усилий определяются по приведенным ниже формулам.

$$M_x = - \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad (4.9)$$

$$M_y = - \left(B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad (4.10)$$

$$M_{xy} = - \left(B_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad (4.11)$$

$$N_x = - \left(B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3B_{13} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right); \quad (4.12)$$

$$N_x = - \left(B_{13} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{23} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \quad (4.13)$$

Предположим, двумерная область, занимаемая конструкцией, имеет вид выпуклого многоугольника (см., например, рис. 4.1). Алгоритмическая запись характеристической функции следующая:

$$\theta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bigcap_{i=1}^K (p_i(x_0, y_0) p_i(x, y) > 0) = \text{true.} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4.14)$$

где
$$p_i(x, y) = (x - x_i)(y_{i+1} - y_i) - (y - y_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (4.15)$$

– уравнение i -й прямой, ограничивающей прямоугольник (рис. 4.1); (x_i, y_i) – координаты вершин многоугольника; $i = 1, 2, \dots, K$; K – количество вершин; (x_0, y_0) – какая-нибудь внутренняя точка многоугольника, например,

$$x_0 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i; \quad y_0 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K y_i. \quad (4.16)$$

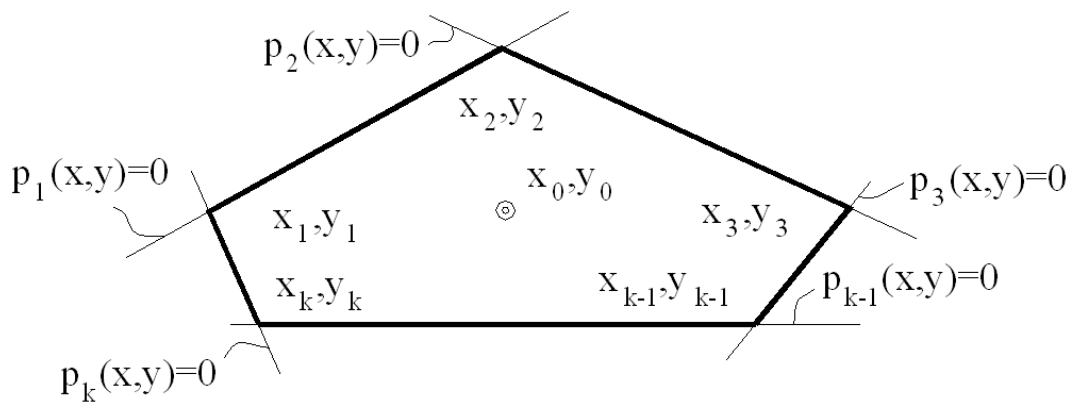


Рис. 4.1. Пример двумерной области, занимаемой конструкцией.

5. АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ.

Для решения задачи можно использовать метод конечных элементов (МКЭ) или метод конечных разностей (МКР) [5]. Произвольно назначенная окаймляющая конструкцию область (прямоугольник) разбивается аппроксимирующей сеткой (рис. 5.1), в узлах которой ищется решение.

Характеристическая функция области Ω аппроксимируется на сетке по формуле

$$\theta_h(i_1, i_2) = \int_{x-h_1/2}^{x+h_1/2} \int_{y-h_2/2}^{y+h_2/2} \theta(x, y) dx dy, \quad (5.1)$$

где h_s – шаг сетки; i_1, i_2 – координаты узла (номер) аппроксимирующей сетки;

Назначается точность аппроксимации N . Участок, обозначенный на рис. 2.1 пунктиром разбивается на $N \times N$ частей. Тогда (рис. 5.2)

$$\theta_h(i_1, i_2) = \sum_{j=1}^{N \times N} \theta_h(x_j, y_j) \Delta_1 \Delta_2. \quad (5.2)$$

Формирование разрешающей СЛАУ осуществляется на основе метода базисных вариаций [5-10].

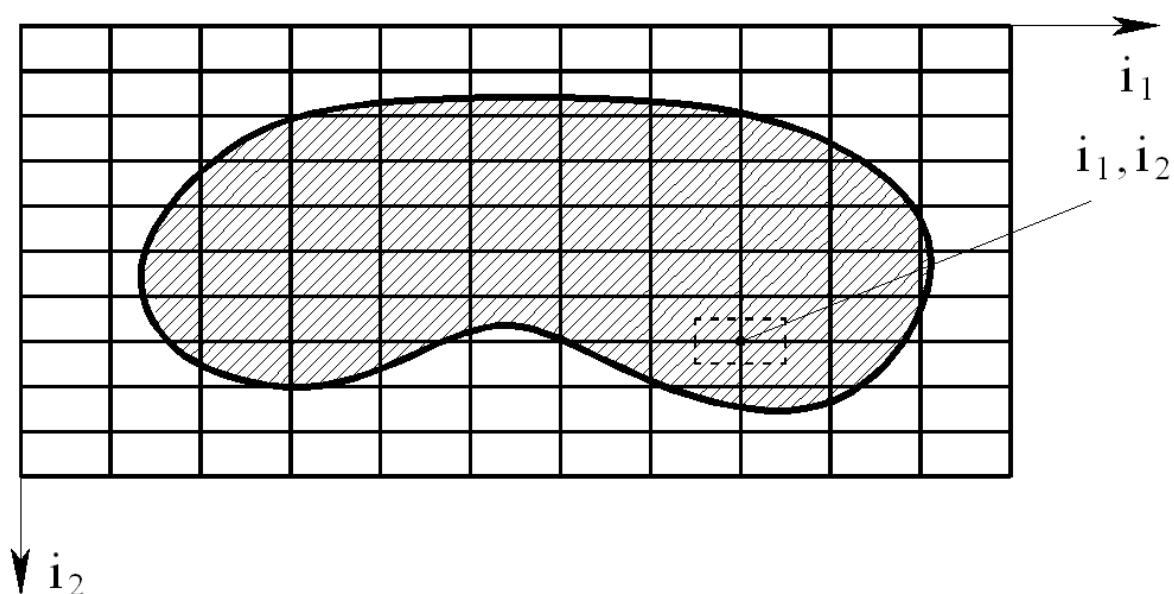


Рис. 5.1. Пример аппроксимации расширенной области.

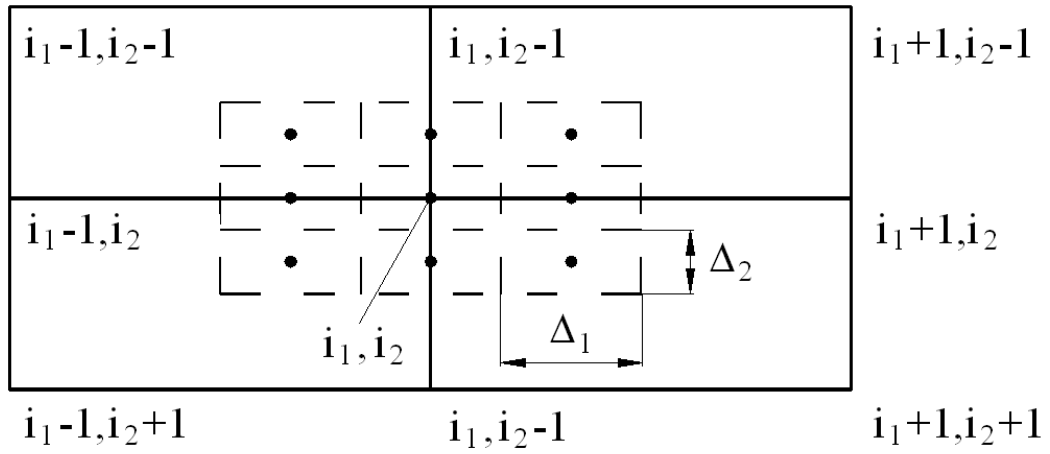


Рис. 5.2. К вопросу аппроксимации функций.

6. ТРАДИЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

К задаче теории упругости для анизотропного тела сводятся многие вопросы расчета строительных конструкций и сооружений (стыки и узлы сооружений, массивные тела, стеновые панели, изделия из пластмасс, железобетона, керамзитобетона, фибробетона, с учетом трещин, арматуры и т.д. К общим уравнениям теории упругости анизотропного тела обращаются также при расчете конструкций, обладающими геометрическими и физическими нелинейностями, а также конструкций, работающих в пластической стадии (деформационная теория пластичности и т.д.).

Имеется четыре типа краевых задач, сформулированных с использованием эллиптических уравнений (среди них, в частности, и анизотропная задача теории упругости) и различающихся по виду задаваемых граничных условий:

первая краевая задача – на границе задаются перемещения;

вторая краевая задача – на границе задаются величины силовых воздействий;

третья краевая задача – на границе задаются нагрузка и условия упругого опирания конструкции;

четвертая краевая задача – на границе задаются силовые воздействия и перемещения.

В настоящем научно-образовательном материале рассматривается задача теории упругости анизотропного тела в перемещениях.

Пусть Ω – область, занимаемая конструкцией с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

Уравнение, действующее в области Ω , имеет вид:

$$\sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{kl} = F_k, \quad k=1, \dots, N, \quad x \in \Omega, \quad (6.1)$$

где

$$\sigma_{kl} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c^{klmn} \varepsilon_{mn} \quad (6.2)$$

– напряжения;

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \quad (6.3)$$

– элементы тензора деформаций;

$c^{klmn} = c^{klmn}(x)$ – тензор упругих характеристик материала конструкции;

u_m , $m = 1, \dots, N$ – неизвестные перемещения точек тела; N – размерность задачи.

Перейдем к рассмотрению соответствующих граничных условий.

Первая краевая задача. Имеем:

$$u_k = g_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in \Gamma, \quad (6.4)$$

т.е. на границе задаются значения перемещений.

Вторая краевая задача (краевая задача с естественными граничными условиями). Имеем:

$$\sum_{l=1}^N \sigma_{kl} \cos(n, x_l) = f_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in \Gamma, \quad (6.5)$$

где n – нормаль к поверхности.

Третья краевая задача. Имеем:

$$\sum_{l=1}^N \sigma_{kl} \cos(n, x_l) + c_k u_k = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in \Gamma, \quad (6.6)$$

где c_k – коэффициенты упругого основания.

Смешанная краевая задача. Здесь на части границы области Γ_1 задана нагрузка, т.е.

$$\sum_{l=1}^N \sigma_{kl} \cos(n, x_l) = f_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in \Gamma_1, \quad (6.7)$$

а на части границы Γ_2 перемещения:

$$u_k = g_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in \Gamma_2, \quad (6.8)$$

причем $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

7. ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

Использование функционала энергии является наиболее удачным с точки зрения алгоритмизации приемом на этапе формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Коэффициенты СЛАУ вычисляются как элементы матрицы, соответствующие функционалу энергии упругой деформации тела.

Выражение для квадратичной части функционала энергии применительно к методу стандартной области имеет вид:

$$\Phi(u) = \int_{R^N} \theta c^{klmn} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{mn}(u) dx, \quad (7.1)$$

R^N – N -мерное вещественное пространство; $\theta = \theta(x)$ – характеристическая функция области,

$$\theta = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega; \end{cases} \quad (7.2)$$

$u = \{u_k\}_{k=1, \dots, N}$ – вектор неизвестных перемещений; $x = [x_1 \dots x_N]^T$ – вектор координат точек тела.

Вектор правых частей СЛАУ соответствует линейной части функционала, который является выражением работы внешних сил, действующих на тело:

$$G(u) = \int_{R^N} F^k u_k dx + \int_{\Gamma} f^k u_k d\Gamma, \quad (7.3)$$

где Γ – поверхность ($N = 3$) или контур ($N = 2$) тела; f^k , $k = 1, \dots, N$ – поверхностные силы; F^k , $k = 1, \dots, N$ – массовые силы.

Повторяющиеся индексы в формулах (7.1) и (7.3) означают суммирование.

Введем понятие дельта-функции границы области Ω .

Пусть уравнение границы $\Gamma = \partial\Omega$ имеет вид $p(x) = 0$. Дельта-функция границы обозначается $\delta(p)$ или δ_{Γ} и определяется равенством

$$\int_{R^N} \delta(p) \varphi(x) dx = \int_{\Gamma} \varphi(x) d\Gamma, \quad (7.4)$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция бесконечного N -мерного пространства R^N .

Приведем ниже другие варианты постановок исходной задачи посредством функционала.

Сообразно (7.4) можем переписать (7.3) в виде

$$G(u) = \int_{R^N} (F^k + \delta(p)f^k)u_k dx. \quad (7.5)$$

Для третьей краевой задачи квадратичная часть функционала энергии записывается следующим образом:

$$\Phi(u) = \int_{R^N} \theta c^{klmn} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{mn}(u) dx + \int_{\Gamma} c_k u_k d\Gamma \quad (7.6)$$

или с использованием дельта-функции границы (7.4)

$$\Phi(u) = \int_{R^N} (\theta c^{klmn} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{mn}(u) + \delta_{\Gamma} c_k u_k) dx. \quad (7.7)$$

Заметим, что линейная часть функционала имеет тот же вид, что и в случае второй краевой задачи.

Подставив в квадратичную часть функционала (7.1), составленную для второй краевой задачи, вместо u_k выражение

$$v_k = \chi_k u_k + (1 - \chi_k) g_k, \quad (7.8)$$

получим

$$\tilde{\Phi}(u) = \int_{R^N} \theta c^{klmn} \varepsilon_{kl}(v) \varepsilon_{mn}(v) dx, \quad (7.9)$$

где χ_k – характеристическая функция, равная единице в точках, где не задано перемещение u_k и ноль в остальных точках стандартной области; $v = [v_1 \dots v_N]^T$.

Используем основное свойство билинейного функционала – линейность по каждому аргументу. Квадратичная часть для смешанной задачи примет вид:

$$\Phi(u) = \int_{R^N} \theta c^{klmn} \varepsilon_{kl}(\chi u) \varepsilon_{mn}(\chi u) dx, \quad (7.10)$$

тогда как линейная часть

$$G(u) = \int_{R^N} (\theta c^{klmn} \varepsilon_{kl}(\chi u) \varepsilon_{mn}((1-\chi)g) + F^k u_k) dx + \int_{\Gamma} f^k u_k d\Gamma, \quad (7.11)$$

где $\chi u = [\chi_1 u_1 \dots \chi_N u_N]^T$; $(1-\chi)g = [(1-\chi_1)g_1 \dots (1-\chi_N)g_N]^T$. (7.12)

Рассмотрим функционал приближенного представления общей краевой задачи теории упругости. Квадратичная часть записывается следующим образом:

$$\Phi(u) = \int_{R^N} (\theta c^{klmn} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{mn}(u) + \delta(p)(c_k + b_k)u_k) dx, \quad (7.13)$$

где b_k – большое число (назначается в тех точках границы, в которых заданы перемещения).

Линейная часть функционала

$$G(u) = \int_{R^N} (\theta F^k + \delta(p)(f^k + b_k g_k)) u_k dx. \quad (7.14)$$

Отметим, что последняя формулировка более предпочтительна с позиций алгоритмизации задачи.

8. АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

Аппроксимация задачи осуществляется по описанной ниже схеме.

1. Выбирается простейшая (стандартная, расширенная [5]) область, окаймляющая рассматриваемую конструкцию. В декартовой системе координат это, как правило, прямоугольник ($N = 2$) или параллелепипед ($N = 3$), где N – размерность задачи.

2. Дискретизация стандартной области осуществляется в рамках МКЭ. Каждый конечный элемент сетки дополнительно делится на 4 ($N = 2$, рис. 8.1) или 8 ($N = 3$) частей (в простейшем случае равных).

3. Формулы аппроксимации, действующие на измельченной сетке, позволяют повысить точность аппроксимации и исключить возможную вырожденность матрицы коэффициентов.

4. Исходя из свойства аддитивности интеграла, функционал энергии представляется как сумма интегралов по конечным элементам сетки, т.е.

$$\Phi(u) = \sum_i \mathcal{E}(i, u), \quad (8.1)$$

где i – номер конечного элемента. Так, например, для второй краевой задачи

$$\mathcal{E}(i, u) = \int_{\omega_i} \theta c^{klmn} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{mn}(u) dx, \quad (8.2)$$

где ω_i – i -й конечный элемент; θ_i – характеристическая функция элемента; $c_i^{klmn} = c_i^{klmn}(x)$ – тензор упругих характеристик материала элемента; повторение верхних и нижних символов означает суммирование.

5. Интеграл (3.2) по конечному элементу, в свою очередь, заменяется суммой четырех ($N = 2$) или восьми ($N = 3$) интегралов по элементам измельченной сетки.

6. Записывается конечноэлементный аналог элементарного интеграла.

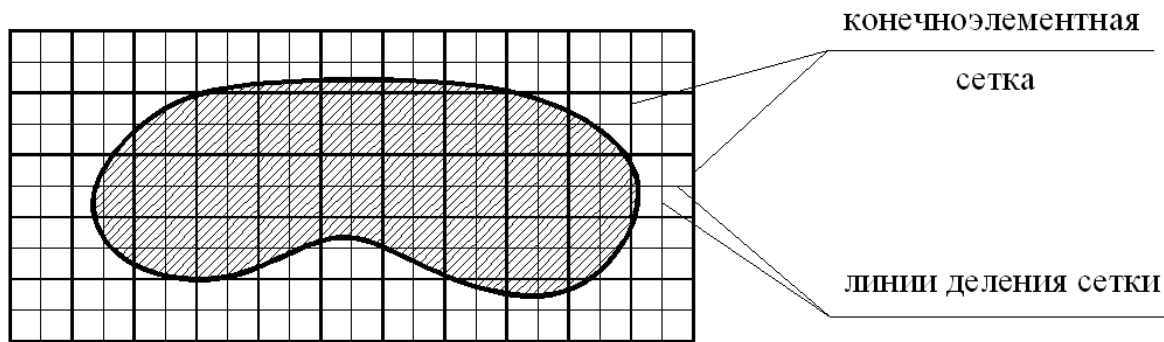


Рис. 8.1. Аппроксимация стандартной области.

Далее описан предлагаемый численный подход к решению смешанной краевой задачи теории упругости анизотропного тела с аппроксимацией функционала по изложенной схеме. Будем использовать формулировку функционала с граничными условиями второго рода (7.1), (7.3). В совокупность этих граничных условий на этапе составления алгоритма численного решения задачи включено граничное условие первого рода $u_k = 0$, наиболее часто встречаемое при решении задач теории упругости в перемещениях. Для этого в алгоритме участвуют характеристические функции χ_k введенные ранее.

Коэффициенты $\tilde{a}_{ijk_1k_2}$ СЛАУ, соответствующей функционалу (7.1) определяются по формуле

$$a_{ijk_1k_2} = \chi_{ik_1} \chi_{jk_2} \tilde{a}_{ijk_1k_2}. \quad (8.3)$$

Заметим, что формула (8.3) написана с учетом линейности функционала по каждому из аргументов.

Дискретный аналог общего выражения для функционала энергии имеет следующий вид:

$$\Phi_h(u) = \sum_i \mathcal{E}_h(i, u). \quad (8.4)$$

Выражению (8.2) соответствует следующая запись:

$$\mathcal{E}_h(i, u) = c_h^{klmn}(i) \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{mn}(u), \quad (8.5)$$

где $i = (i_1, \dots, i_N)$ – номер элементарной подобласти;

$$c_h^{klmn}(i) = \int_{\omega_i} \theta_i c_i^{klmn}(i) dx, \quad (8.6)$$

причем считается, что значения упругих характеристик материалы постоянны в пределах конечного элемента; повторение верхних и нижних символов означает суммирование.

Придерживаясь предложенной схемы аппроксимации заменим (7.19) на соответствующую сумму. Так, например, для двумерного случая имеем:

$$\mathcal{E}_h(i, u) = \sum_{t_1=0}^1 \sum_{t_2=0}^1 c_h^{klmn}(i) \varepsilon_{kl}^{t_1 t_2}(u) \varepsilon_{mn}^{t_1 t_2}(u). \quad (8.7)$$

Заметим, однако, что при составлении функционала проще использовать формулу аппроксимации (8.5), но в этом случае есть вероятность случая, когда значение функционала энергии для i -го конечного элемента будет равным нулю не при нулевом, а кососимметричном перемещении узлов элемента. Это приводит к вырожденности системы уравнений.

В дальнейшем для упрощения алгоритма количество индексов в (8.7) сокращается:

$$\mathcal{E}_h(i, u) = \frac{1}{4} \sum_{t_1=0}^1 \sum_{t_2=0}^1 c_h^{st}(i) \varepsilon_s^{t_1 t_2}(u) \varepsilon_t^{t_1 t_2}(u), \quad (8.8)$$

где t_1, t_2 – индексы локальной сетки на конечном элементе; $t_1 = 0, 1$; $t_2 = 0, 1$ (рис. 8.2); $\varepsilon_s^{t_1 t_2}(u)$ – величина относительной деформации (6.3), вычисляемая для части конечного элемента с индексами t_1, t_2 .

Новые индексы вычисляются через прежние по соответствующим формулам. Так, например, для двумерного случая соответствие индексов представлено в таблице 8.1, а для трехмерного – в таблице 8.2.

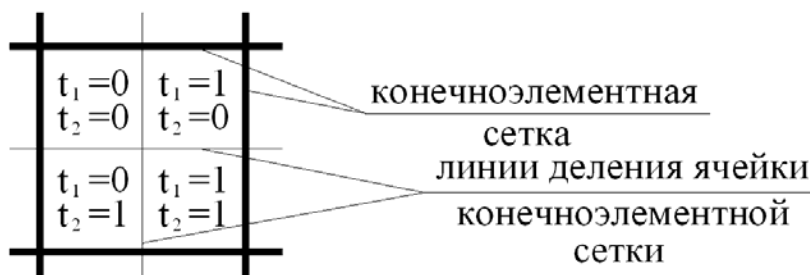


Рис. 8.2. Локальная сетка (для интегрирования) на конечном элементе.

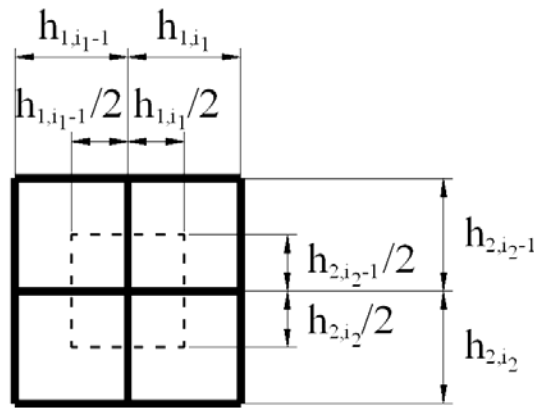


Рис. 8.3. Область интегрирования, соответствующая узлу конечного элемента.

Таблица 8.1. Соответствие индексов для двумерного случая.

s или t	1	2	3
k или m	1	2	1
l или n	1	2	2

Таблица 8.2. Соответствие индексов для трехмерного случая.

s или t	1	2	3	4	5	6
k или m	1	2	3	1	2	1
l или n	1	2	3	2	3	3

В связи с сокращением индексов (т.е. с заменой (2.21) на (2.22)) более алгоритмичной будет запись выражения для $\varepsilon_s^{t_1 t_2}(u)$ как для компоненты относительных деформаций [5]. В частности, для случая $N = 2$ имеем:

$$\varepsilon_s^{t_1 t_2} = \begin{cases} \frac{D_{ss}^{t_1 t_2}}{h_{s,i_s}}, & \text{если } s=1 \text{ или } s=2 \\ \frac{D_{12}^{t_1 t_2}}{h_{2,i_2}} + \frac{D_{21}^{t_1 t_2}}{h_{1,i_1}}, & \text{если } s=3, \end{cases} \quad (8.9)$$

где $D_{11}^{t_1 t_2} = u_{1,i_1+1,i_2+t_2} - u_{1,i_1,i_2+t_2}$; $D_{22}^{t_1 t_2} = u_{2,i_1+t_1,i_2+1} - u_{2,i_1+t_1,i_2}$; (8.10)

$$D_{12}^{t_1 t_2} = u_{1,i_1+t_1,i_2+1} - u_{1,i_1,i_2+t_2}; \quad D_{21}^{t_1 t_2} = u_{2,i_1+1,i_2+t_1} - u_{2,i_1,i_2+t_2}. \quad (8.11)$$

Для вычисления правых частей (свободных членов) формируемой СЛАУ используется формула ($N = 2$):

$$F_h(i, u) = \int_{\Xi_i} (F^k + \delta(p) f^k) dx, \quad (8.12)$$

причем интеграл по второму слагаемому берется согласно приведенному ранее определению функции $\delta(p)$. Символ Ξ_i обозначает, что интегрирование ведется по области, окаймляющей узел номер i .

Заметим, что на этапе программной реализации значения F^k , f^k и χ_k задаются либо в виде запрограммированных законов изменения функций $F^k = F^k(x)$, $f^k = f^k(x)$ и $\chi_k = \chi_k(x)$, либо в виде таблиц сосредоточенных значений этих функций в точках, координаты которых не зависят от выбора конечноэлементной сетки (для переработки таких таблиц в таблицы дискретных функций могут быть написаны соответствующие процедуры).

9. ПОСТАНОВКА И АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В РАМКАХ МЕТОДА СТАНДАРТНОЙ ОБЛАСТИ.

Домножим слагаемые уравнения (6.1), справедливого внутри области Ω , на характеристическую функцию θ , а краевые условия (6.5) на дельта-функцию $\delta(p)$ границы области $\Gamma = \partial\Omega$. Сложим левые и правые части полученных равенств. В результате будем иметь:

$$\theta \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{kl} + \delta(p) \sum_{l=1}^N \sigma_{kl} \cos(n, x_l) = \theta F_k + \delta(p) f_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (9.1)$$

Далее воспользуемся равенством, связывающим производную характеристической функции области и дельта-функцию границы:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \delta(p) \cos(n, x_j). \quad (9.2)$$

Можем записать:

$$\theta \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{kl} + \delta(p) \sigma_{kl} \cos(n, x_l) = \frac{\partial}{\partial x_l} (\theta \sigma_{kl}), \quad k = 1, \dots, N. \quad (9.3)$$

Окончательно получим:

$$L_k u = \Phi_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (9.4)$$

где
$$L_k = \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (\theta \sigma_{kl}), \quad k = 1, \dots, N; \quad u = [u_1 \dots u_N]^T; \quad (9.5)$$

$$\Phi_k = \theta F_k + \delta(p) f_k; \quad \sigma_{kl} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c^{klmn} \varepsilon_{mn}; \quad (9.6)$$

$c^{klmn} = c^{klmn}(x)$ – тензор упругих характеристик материала конструкции; ε_{mn} – тензор относительных деформаций (см. формулу (6.3)); $\delta(p)$ – реализуется формулой

$$\delta(p) = \sqrt{\sum_{s=1}^N \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_s} \right)^2}. \quad (9.7)$$

Оператор краевой задачи сформулирован так, что оказывается справедливым для любой окаймляющей (расширенной) области. Уравнение (9.4), записанное для второй краевой задачи, является исходным для постановки краевых задач других типов.

Третья краевая задача (расчет упругой конструкции с упругими опорами). Вывод формул в рамках метода стандартной области в данном случае аналогичен представленному выше. Умножая равенство (6.1) на характеристическую функцию θ , а краевые условия (6.6) на дельта-функцию $\delta(p)$ границы и складывая полученные произведения, получим расширенную дополнительными граничными условиями запись типа (9.4):

$$L_k u + \delta(p) c_k u_k = F_k + \delta(p) f_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (9.8)$$

где c_k – коэффициенты упругости опор.

Смешанная краевая задача. Первый вариант постановки предполагает использование характеристических функций χ_k определяемых по следующему правилу: χ_k равна единице в точках, где не задано перемещение u_k и нулю в остальных точках стандартной области.

Умножим краевые условия первого рода на функцию $(1 - \chi_k)$, а оператор второй краевой задачи – на χ_k . Получим:

$$\chi_k L_k u + (1 - \chi_k) u_k = (\theta F_k + \delta(p) f_k) + (1 - \chi_k) g_k. \quad (9.9)$$

Представленное выражение справедливо для стандартной области, но его оператор не является самосопряженным. Соответственно при дискретизации возникает несимметричная матрица коэффициентов СЛАУ, что приводит к некоторым вычислительным осложнениям при решении разрешающей СЛАУ на ЭВМ. В тоже время привести оператор к симметричному виду несложно. Подставив (7.8) в (6.9) получим (см. также формулу (7.12)):

$$\chi_k L_k (\chi u) + (1 - \chi_k) u_k = \chi_k (\theta F_k + \delta(p) f_k - L_k ((1 - \chi_k) g_k)) + (1 - \chi_k) g_k. \quad (9.10)$$

Оператор этого уравнения самосопряженный. Для третьей и смешанной краевой задачи аналогичным образом получим общее равенство

$$\chi_k L_k u + (1 - \chi_k) u_k + \chi_k c_k \delta(p) u_k = \chi_k (\theta F_k + \delta(p) f_k) + (1 - \chi_k) g_k, \quad (9.11)$$

где c_k – коэффициенты упругости опор.

Ему эквивалентно уравнение с симметричным оператором, полученное подстановкой в (9.11) равенства (7.8):

$$\begin{aligned} \chi_k L_k(\chi u) + (1 - \chi_k)u_k + \chi_k c_k \delta(p)u_k = \\ = \chi_k(\theta F_k + \delta(p)f_k) - \chi_k L_k((1 - \chi_k)g_k) + (1 - \chi_k)g_k. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Второй вариант предполагает приближенное представление смешанной краевой задачи.

Краевые условия первого типа (значения перемещений) подразумевают описание разного рода закреплений. Как правило, их принимают абсолютно жесткими. Тем не менее, в пределах точности решения эти закрепления можно считать упругими, но с большими коэффициентами жесткости. Тогда общая задача теории упругости будет иметь вид третьей краевой задачи, т.е.

$$L_k u + \delta(p)\tilde{c}_k u_k = \theta F_k + \delta(p)f_k, \quad (9.13)$$

где $\tilde{c}_k = \begin{cases} c_k - \text{коэффициенты упругости опор в местах упругих опираний;} \\ b_k - \text{большое число } (b_k \rightarrow \infty) \text{ в местах жестких заделок и опираний;} \end{cases}$

$$(9.14)$$

$$L_k u = \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (\theta \sigma_{kl}), \quad k = 1, \dots, N. \quad (9.15)$$

Формулировка (9.13) рекомендуется для численного решения общей задачи теории упругости анизотропного тела с произвольным контуром и произвольными граничными условиями.

Приведем ниже общий разностным оператор для задачи теории упругости анизотропного тела с произвольным очертанием и граничными условиями смешанного типа:

$$\chi_k(i) L_k(\chi u) + c_k u_k \delta_h(p) + (1 - \chi_k)u_k = G_k, \quad (9.16)$$

$$\text{где } L_k = \sum_{l=1}^N D^- \theta \sigma_{kl}; \quad \sigma_{kl}(i) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_{klmn} \varepsilon_{mn}; \quad \varepsilon_{mn} = 0.5(D_m^+ u_n + D_n^+ u_m); \quad (9.17)$$

$$G_k = F_k(i) + \delta_h(p)f_k(i) + \chi_k L_h g_k + g_k(i). \quad (4.18)$$

На разностной сетке функции, на которые действует оператор, аппроксимируются по-разному.

Для получения сеточной функции $\chi_k(i)$ используется «снос в ближайшую точку» значений функции $\chi_k(x)$ (рис. 9.1а). Функции $\theta(i)$ и $c_{klmn}(i)$ вычисляются, как правило, «среднеинтегральной» аппроксимацией по элементарному прямоугольнику (параллелепипеду, рис. 9.1б).

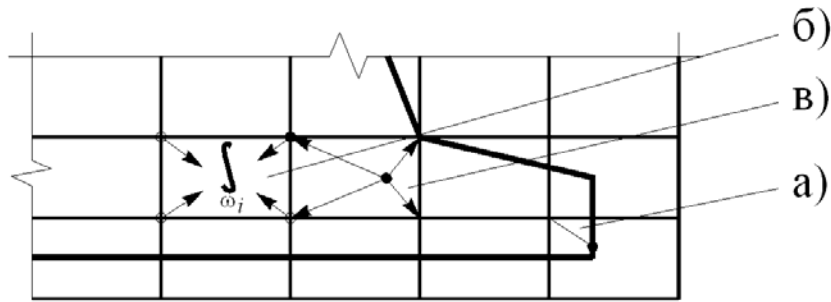


Рис. 9.1. Аппроксимация функций.

Так, например, в записи типа

$$\int_{\omega_i} \theta(x) dx$$

символ ω_i обозначает интегрирование по конечному элементу.

Значения функций $F_k(i)$, $c_k(i)\delta_h(p)$, $f_k(i)\delta_h(p)$ вычисляются либо «среднеинтегрально», либо (особенно при аппроксимации значений сосредоточенных воздействий) приемом «разнос (в узлы ячейки) обратно пропорционально расстоянию» (рис. 9.1в).

Производные аппроксимируются по формулам

$$D_m^+ \varphi = \frac{1}{h_m(i) \cdot 2^{N-1}} \Delta_m^+ T_{m'}^+ T_{m''}^+ \varphi \quad (9.19)$$

– сеточная функция дифференцирования «вперед», где m' и m'' – направления, перпендикулярные к m ;

$$\Delta_m^+ \varphi = \varphi(i_m + 1) - \varphi(i_m) \quad (9.20)$$

– разность «вперед»;

$$T_m^+ \varphi = \varphi(i_m + 1) + \varphi(i_m) \quad (9.21)$$

– осреднение «вперед» (заметим, что если $N = 2$, то $T_{m''}^+$ – тождественный (единичный) оператор);

$$D_m^- \varphi = \frac{1}{h_m(i) \cdot 2^{N-1}} \Delta_m^- T_{m'}^- T_{m''}^- \varphi \quad (9.22)$$

– сеточная функция дифференцирования «назад», где

$$\Delta_m^- \varphi = \varphi(i_m) - \varphi(i_m - 1) \quad (9.23)$$

– разность «назад»;

$$T_m^- \varphi = \varphi(i_m) + \varphi(i_m - 1) \quad (9.24)$$

– осреднение «назад» (заметим, что если $N = 2$, то $T_{m''}^-$ – тождественный (единичный) оператор);

Аппроксимация производных по формулам (9.19) и (9.22) с одной стороны достаточно, а с другой – обладает большой точностью при аппроксимации граничных условий и хорошо согласовывает отдельные части аппроксимируемого выражения.

Разностный оператор упрощается при использовании приближенного представления (9.16) произвольной краевой задачи теории упругости анизотропного тела,

$$L_k u + (c_k + b_k) \delta_h(p) u = F_k(i) + \delta_h(p) (f_k + b_k g_k), \quad (9.25)$$

где b_k – большое число, задаваемое в точках, в которых $\chi_k \equiv 0$. Основные обозначения в данном случае те же, что и предыдущем разностном представлении оператора (9.16).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.* Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 572 с.
2. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979.–320с.
3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Том 1. – М.: Добросвет, 2007. – 408 с.
4. *Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И.* Расчет конструкций на упругом основании. – М., Стройиздат, 1984. – 679 с.
5. *Золотов А.Б.* Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. МГСУ. М.: 1989.
6. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
7. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
8. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
9. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
10. *Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.* Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. М.: МИСИ, 1992. – 86 с.

11. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
13. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
14. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
15. *Сидоров В.Н.* Дискретные постановки и алгоритмы решения краевых задач строительной механики в произвольных областях на регулярных сетках. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. М.: 1992.
16. *Сидоров В.Н.* Разработка метода решения краевых задач на ЭВМ для расчета различных типов строительных конструкций. Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 01.02.03. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. М.: 1976. – 171 с.
17. *Сидоров В.Н., Ахметов В.К.* Математическое моделирование в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2007. – 336 с.